# תזכורת

יהיו f,g פונקציות. אזי בנקודות בהן f,g רציפות וגם מתקיים רציפה.

אם רציפה ב, ו רציפה ב אזי רציפה ב

כאשר מחפשים נקודות אי רציפות מחפשים:

1. מכנה מתאפס
2. נק' אי הגדרה

## דוגמה

כאשר המכנה מתאפס. כאשר , ln אינה מוגדרת.

# משפט ערך הביניים

תהי f רציפה בקטע ונניח . יהי אזי קיימת נקודה כך ש

# תרגיל

תהי f רציפה ב כך ש, . הוכח שהתמונה של f הינה על (כלומר f מקבלת כל ערך ממשי)

## הוכחה

יהי . צ"ל להוכיח שקיימת כך ש. לכן לכל קיים כך שלכל מתקיים . לכן בפרט עבור קיים כך שלכל מתקיים . בפרט עבור מתקיים ולכן .  
באופן סימטרי קיים עבורו .  
בקטע הסגור ניתן להפעיל את משפט ערך הביניים ולכן עבור קיימת כך ש

# תרגיל

איש עלה על הר משעה עד . למחרת ב הוא החל לרדת והגיע לקרקע ב. הוכח שקיימת שעה בין בה האיש היה בדיוק באותו גובה על ההר, בשני הימים.

## מילולית

אם נשכפל את האדם כך שיעלה וירד באותו יום, ברור שיהיה חייב לעקוף את "עצמו" בשלב מסויים.

## ניסוח מתמטי

רציפות. נניח g על(קצת שונה מהניסוח המילולי )  
צ"ל שקיים כך ש. כלומר צ"ל שקיים כך ש. נסמן . נתון g על, לכן קיים כך ש. כמו כן קיים כך ש. לכן , => קיימת נקודה כך ש כפי שרצינו.

# משפט

פונקציה רציפה בקטע סגור, חסומה בו ומקבלת מינימום ומקסימום בו.

# תרגיל

תהי f פונקציה רציפה בקטע המקיימת

## הוכח שf חסומה בקטע

, ולכן , אבל בקטע f חסומה כי היא רציפה.  
ניקח כלשהו(נניח 1) לכן קיים כך שלכל מתקיים ולכן בקטע f חסומה בין ל. בקטע הסגור לפי משפט הפונקציה חסומה כי היא רציפה. נניח שבין . סה"כ: לכל ,

## הוכיחו שאם f מקבלת מינימום ב אזי קיים כך ש

נניח בשלילה שלכל , אבל f מקבלת מינימום בנקודה כלשהי ולכן  
 => => – סתירה.

## הוכח שאם קיים כך ש אזי f מקבלת מינימום ב

, לכן קיים כך שלכל מתקיים . נבחר . לכן קיים M כך שלכל מתקיים , לכן בפרט ולכן . f רציפה ב ולכן מתקבלת שם מינימום בנקודה . ברור ש וגם ולכן מינימום בכל

## הוכיחו שאם קיים כך ש אזי f מקבלת מינימום ב

נניח ש לכל x ב, לכן ברור ש נקודת מינימום. אחרת קיים כך ש ולפי סעיף ג' סיימנו.

# הגדרה

תהי . נאמר שf רציפה במידה שווה(במ"ש) בA אם לכל קיים (שתלוי ב בלבד ולא בx) כך שלכל המקיימים מתקיים

# דוגמה

יהי צ"ל כך שלכל המקיימים מתקיים .𝑝𝑠𝑖𝑙𝑜𝑛 וה(במ"ש)(בנקדוה רציפה. ם ומקסימום בו.ב לעקוף את עצמו   
ולכן ניקח . לכן f רציפה במ"ש בA

יהי , נבחר , לכן אם אזי  
לכן f רציפה במ"ש על כל

# מתי פונקציה אינה רציפה במ"ש?

f אינה רציפה במ"ש בA אם קיים כך שלכל קיימים כך ש אבל

# תרגיל

, רוצים להוכיח שf אינה רציפה במ"ש בA.  
נבחר , צ"ל לכל , ממשיים כך ש אבל

רוצים => . עבור כזה,